5 дәріс. Тақырыбы: Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі (САТЖ). Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу.

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі (САТЖ) Матрицалық әдіс және Крамер ережесі

Анықтама. *n белгісізі бар m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі (САТЖ) келесі түрде жазылады*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Мұнда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалылары жүйенің белгісіздері, a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m;$ $j = 1,2,\ldots,n$ **жүйе коэффициенттері;** ал b_i, $i = 1,2,\ldots,m$ **бос мүшелер** деп аталады. Жүйенің барлық теңдеулерін тепе-теңдікке айналдыратын $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандары **жүйенің шешімі** деп аталады. Егер жүйенің шешімі бар болса ол **үйлесімді,** ал шешімі болмаса **үйлесімсіз** жүйе деп аталады.

(1) -дегі белгісіздер коэффициенттерінен құралған $m \times n$ өлшемді матрицаны A арқылы (оны **жүйе матрицасы** деп атайды)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

бос мүшелері бағанын B арқылы, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$,

ал белгісіздер бағанын X арқылы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ белгілейік.

Онда (1) **САТЖ матрицалық түрде** жазуға болады (тексеріңіз):

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

немесе қысқаша

$$AX = B. \tag{2}$$

Егер A квадрат матрица болса жүйенің матрицалық түрінен кері матрицаны пайдаланып оның шешімін табуға болады.

Теорема. САТЖ - нің матрицасы нұқсансыз болса, онда оның жалғыз шешімі бар және ол келесі формуламен есептеледі:

$$X = A^{-1}B. \tag{3}$$

САТЖ -сін (3) формула арқылы шешу **матрицалық әдіс** деп аталады. Жүйенің **Крамер ережесі** деп аталатын басқа да түрде шешуді көрсетейік. (1) - С.А.Т.Ж. n - ші ретті квадрат матрицасының детерминанты нөлге тең емес: $\Delta = \det A \neq 0$ болсын. Онда (1) -жүйенің жалғыз шешімі бар және ол келесі формулалар арқылы табылады:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,2,...,n. \tag{4}$$

Мұндағы $\Delta_i - \Delta$ анықтауышынан оның i -ші бағанын жүйенің бос мүшелер бағанымен ауыстыру арқылы алынатын анықтауыш.

САТЖ зерттеудің және оның шешімін табудың Гаусс әдісі

Матрицалық әдіс пен Крамер ережесінің негізгі екі кемшілігі бар. Біріншіден - оларды нұқсансыз матрицалары бар теңдеулер жүйесіне ғана қолдануға болады; екіншіден - сандық теңдеулер жүйесін шешуде тиімсіз, өйткені ол әдістерді қолдану, Гаусс схемасына қарағанда, n^2 есеге жуық есептеу амалдарын жасауды керек етеді. **Мысалы,** $n=10$ болса, онда бұл әдістерді қолдану мүмкіндігі тіпті аз. Элементар түрлендіру (Гаусс) әдісі кез келген тік бұрышты (квадрат қана емес) матрицалары бар теңдеулер жүйесін зерттеп және шешімін табуға (жүйенің шексіз көп шешімі бар жағдайда да) мүмкіндік береді. Теңдеулер жүйесін зерттеу оның үйлесімді, немесе үйлесімсіз екенін, ал егер үйлесімді болса, онда жүйе шешімінің қанша болатынын анықтау.

Анықтама. ***САТЖ -нің кеңейтілген матрицасы*** *деп жүйе матрицасының оң жағынан бос мүшелер бағанын тіркеп жазу арқылы алынған матрицаны айтады (тіркелген бос мүшелерді әдетте вертикаль сызықпен бөліп қояды).*

Мысалы (1) - САТЖ матрицасы $A_{m\times n}$ өлшемді болса, онда оның кеңейтілген матрицасы $\overline{A}_{m\times(n+1)}$ өлшемді болады:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots \ldots \ldots & \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Олардың рангтерінің екі жағдайы: $r(\overline{A}) = r(A)$ немесе $\mathrm{r}(\overline{\mathrm{A}}) > \mathrm{r}(\mathrm{A})$ болуы мүмкін.

Келесі теорема теңдеулер жүйесін зерттеуге мүмкіндік береді.

Теорема (Кронекер-Капелли). Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангілері тең болса, $(r(A) = r(\overline{A}))$ жүйе үйлесімді болады.

Енді теңдеулер жүйесін Гаусс схемасы бойынша зерттеу және шешу сұрақтарын қарастырайық.

Гаусс әдісімен A және $\overline{A}$ матрицаларының рангілерін анықтау үшін $\overline{A}$ – кеңейтілген матрицасын жазып алып (соңғы бос мүшелер бағанын өзгертпей) элементар түрлендірулер арқылы A матрицасы трапеция тәріздес матрицаға келтіріледі. Егер бұл түрлендірулерде бағандар орын алмасқан болса, оларды өздеріне сәйкес белгісіздермен белгілеп отырады.

Трапеция тәріздес матрица рангісі туралы жоғарыда қарастырғанбыз. Сонымен $r(A)$ және $r(\overline{A})$ анықталды делік.

Келесі жағдайлар болуы мүмкін.

1) $r(\overline{A}) > r(A)$. Бұл жағдайда Кронекер-Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімсіз.

2) $r(\overline{A}) = r(A) = r$. Бұл жағдайда сол теорема бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімді сонымен бірге:

а) егер $r = n$ болса, яғни матрицалардың рангілері белгісіздер санына тең болса, онда жүйе шешімі жалғыз болады;

б) егер $r < n$ болса, онда теңдеулер жүйесінің $n - r$ параметрлеріне $(c_1, c_2, ..., c_{n-r})$ тәуелді шексіз көп шешімі болады.

Ескерту. Қолданылған элементар түрлендірулер жүйенің шешімдер жиынын өзгертпейді, яғни жүйе бастапқы жүйеге мәндес болып қалады.

Біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі

Анықтама. *Егер бос мүшелерінің барлығы нольге тең болса САТЖ -сі **біртекті,** ал бос мүшелер бағаны нөл емес САТЖ -сі **біртекті емес** деп аталады.*

Біртекті САТЖ-сін келесі түрде жазуға болады.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

немесе матрицалық түрде $AX = 0$. Мұнда $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ – нөл баған.

Біртекті жүйе әрқашанда үйлесімді, өйткені оның тривиал деп аталатын $x_1 = 0,\ x_2 = 0, ..., x_n = 0$ шешімі бар.

Матрицалық әдіс және Крамер ережесін біртекті жүйені шешуге қолданудың реті жоқ. Өйткені, егер $\det A \neq 0$ болса, онда $r(A) = r(\overline{A}) = n\ \ (A = \overline{A})$ болады да жүйенің жалғыз тривиал шешімі бар; ал егер $\det A = 0$ болса, онда бұл әдістер жарамайды.

Сондықтан мұндай жағдайда біртекті жүйелерді шешудің Гаусс схемасын қолданамыз.

$$\left.\begin{aligned}5x_1+3x_2+4x_3&=2700\\2x_1+x_2+x_3&=900\\3x_1+2x_2+2x_3&=1600\end{aligned}\right\}$$

Крамер әдісін қолданамыз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&3&4\\2&1&1\\3&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}(4)\\ \\(-2)\end{matrix}=\begin{vmatrix}-3&-1&0\\2&1&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&0\end{vmatrix}=-(0-1)=1$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{\Delta 1}{\Delta}=200\\x_2&=\frac{\Delta 2}{\Delta}=300\\x_3&=\frac{\Delta 3}{\Delta}=200\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2700&3&4\\900&1&1\\1600&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}(4)\\ \\(-2)\end{matrix}=\begin{vmatrix}-900&-1&0\\900&1&1\\-200&0&0\end{vmatrix}=200,\quad \Delta 2=300,\quad \Delta 3=200$$

Гаусс әдісі:

$$\left.\begin{aligned}5x_1+3x_2+4x_3&=2700\\2x_1+x_2+x_3&=900\\3x_1+2x_2+2x_3&=1600\end{aligned}\right\}^{:5}\Rightarrow\begin{cases}x_1+\frac{3}{5}x_2+\frac{4}{5}x_3=540 & /\times 2,\times 3\\2x_1+x_2+x_3=900 & (-2)\\3x_1+2x_2+2x_3=1600 & (-3)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+\frac{3}{5}x_2+\frac{4}{5}x_3=540\\\left(1-\frac{6}{5}\right)x_2+\left(1-\frac{8}{5}\right)x_3=900-1080\\\left(2-\frac{9}{5}\right)x_2+\left(2-\frac{12}{5}\right)x_3=1600-1620\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+\frac{3}{5}x_2+\frac{4}{5}x_3=540\\-\frac{1}{5}x_2-\frac{3}{5}x_3=-180\\\frac{1}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3=-20\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 = 540 \\ x_2 + 3x_3 = 900 \\ x_2 - 2x_3 = -100 \quad (\text{-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 = 540 \\ x_2 + 3x_3 = 900 \\ -5x_3 = -1000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 540 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 = 540 - 180 - 160 = 200 \\ x_2 = 900 - 3x_3 = 900 - 600 = 300 \\ x_3 = 200 \end{cases}$$

Ответ $\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 300 \\ x_3 = 200 \end{cases}$